岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第15号（2008年）39頁～50頁

# 構成主義にもとづく基礎操作の研究
## ―乗法・除法の基礎操作のカリキュラム開発―

山野定寿＊

研究の要約

算数的活動、特に基礎操作は児童の「主体性」や「思考力・判断力・表現力」を育てる上で極めて重要である。基礎操作である現実的表現、操作的表現、イメージ図的表現、言語・命題的表現、記号的表現の５つの活動を総合的に考えたカリキュラムにより児童の思考活動はいっそう深まる。そこで乗法・除法に関する基礎操作のカリキュラムを提案する。

### 1　本研究の目的

１９９８年告示の学習指導要領では、「算数的活動」を積極的に取り入れようとしたが、国内外の調査から算数的活動は十分でないことが指摘された。例えば TIMSS の調査は、日本の子どもは算数・数学の勉強は楽しいと思う割合が少ないなど情意面の課題を指摘した。H 15 年の教育課程実施状況調査は、算数を現実場面でどう生かすかなどに課題があること、教師への調査では算数数学的活動が不十分なことを示した。基礎・基本の学力面においても、算数的活動、特に思考を助ける基礎操作に課題があることが、H 15 年の教育課程実施状況調査やH 19 年の全国学力調査、PISA2003,2006 等で示された。 2008 年告示の学習指導要領ではこの状況をふまえ、「算数的活動を通して、基礎・基本を身に付け、それを活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力を養い、主体的に学ぶ態度を育成する」という方向性が示された。したがって、思考と教材を結びつける基礎操作（算数的活動）の重要性はこれまで以上に高まった。しかし基礎操作についての一貫したカリキュラムは不十分であり、その開発が必要と考え本研究に取り組んだ。

### 2　研究の内容

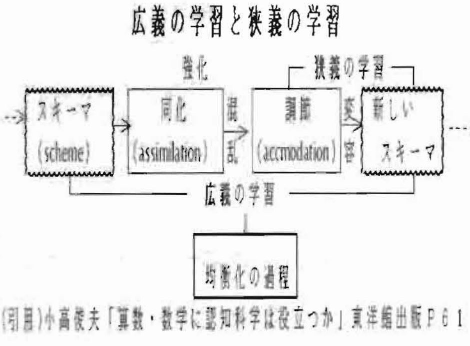
#### （1）構成主義に基づいた重点目標と算数的活動の関係について

＊真庭市立中和小学校
岡山大学大学院教育学研究科

①　**主体性と構成主義**…相互作用的構成主義において、算数・数学教育を含めた教科指導の最終目標は知的自律性（Piaget）の育成で、他者への依存や強制でなく、自らが主体的に知識を構成し、その適否を判断し、新しい状況にそれを活用していく思考力・判断力・表現力を育成していくことである。また構成の方法的原理に踏み込む相互作用的構成主義では、知識を構成する上で「同化と調節」「反省的思考」「社会的相互作用」が重視される。これらの方法は、教育基本法の理念である「人間形成」や学習指導要領の重点である「主体性」、活用のための「思考力・判断力・表現力」を育てる上でも極めて重要な方法であると考える。

特に図３－１－５に示す既有のスキーマを新しいスキーマに更新する「調節」において、基礎操作が極めて重要であると考えている。

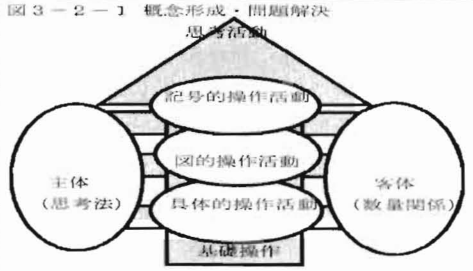
図３－１－５




(引用)小高俊夫「算数・数学に認知科学は役立つか」東洋館出版P61

言うまでもなく算数的活動の核は論理的な思考力や直観力，問題解決の能力を育成する「思考活動」である。作業的・体験的活動等はその活動性に意義を持つが、あくまで試行接近していく思考活動の過程の一手段である。したがって、主体の思考法と客体の数量関係を結びつけ、思考を助ける具体的な処理である基礎操作が「算数的活動」の中心である。図３－２－１のように基礎操作は「具体的操作活動」「図的操作活動」「記号的操作活動」等の操作的活動の本質であり、問題解決のための操作的活動を思考活動として結びつけ、問題解決に向かわせる役割を果たす総合的な具体的活動である。

図３－２－１　概念形成・問題解決

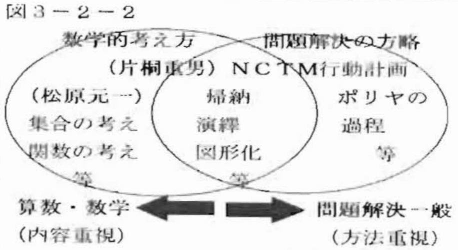



基礎操作のイメージ

図３－２－１のように基礎操作は「具体的操作活動」「図的操作活動」「記号的操作活動」等の操作的活動の本質であり、問題解決のための操作的活動を思考活動として結びつけ、問題解決に向かわせる役割を果たす総合的な具体的活動である。

② 「数学的思考力」とは…図３－２－１の主体の思考法である考える力について主張を整理したのが図３－２－２で、算数・数学的な内容重視や問題解決一般の方法重視の傾向がある。

図３－２－２




問題解決の方略と考え方

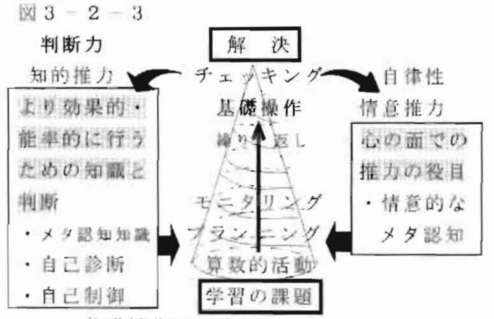
（参考）杉岡司馬「「学ぶ方・考え方」をめざす算数指導」東洋館出版社　Ｐ３３

集合の重なりは、「数学的考え方」と「問題解決の方略(strategy)」との共通するものである。片桐氏は、数学的な考え方を内容・方法の両方について捉え、その機能として必要な知識技能に気付かせ導き出す Guiding　Forces の機能とそれを繰り出す driving　Forces の機能を指摘する。また必要な数学的な考え方を引き出す基になる driving　Forces の機能を数学的な態度とし、次に述べるメタ認知機能を包含している点で、特に注目している。

③ **基礎操作におけるメタ認知の機能と「判断力」モデル試案…**

図３－２－３が判断力モデル試案である。

図３－２－３




基礎操作における
メタ認知の機能と判断モデル２試案

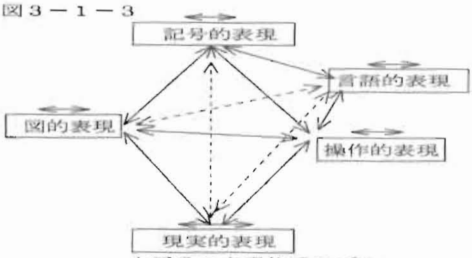
判断力は学習課題が示され、それを解決していく過程で、どのような算数的活動を選ぶかこれまでのメタ認知知識が働き、問題解決の方略の決定について判断を行う力だ。次にどんな順番でその活動を行うか、どれ位時間をかけて行うかなど活動についてのプランニングを行い、活動が始まると、モニタリングが始まる。活動がプラン通り上手くいっているか監視と制御をする。上手くいっていないと判断した場合、もう一度メタ認知知識をもとにプランニングを行う判断をし、活動を修正する。この活動の修正により作業的、体験的な活動は洗練され、思考活動が中心の基礎操作となる。最後にこの活動で得られた結果が良かったかどうかの評価を行う。このチェッキングによって、この問題解決における一連の算数的活動の基礎操作を成功の教訓や失敗の教訓（メタ認知的知識）として知的推力に加える。また、今後の算数的活動にお

いて「頑張れば出来る」「楽しいぞ」といった情意推力として働く。

### （2）　表現体系の試案

図３－１－３は中原忠男氏の表現体系モデルで、図４－３－１は筆者の表現体系モデルである。

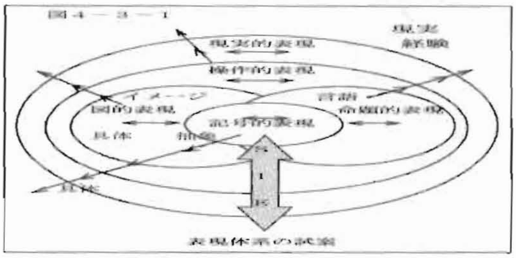
図３－１－３




中原氏の表現体系モデル

（引用）中原忠男著「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」聖文社　　Ｐ１９６～Ｐ２０５

ここでは２つの表現体系モデルとの相違点について、「使用する用語が包含する領域の違い」と「表現同士の関係性」について２項を設け、説明する。




表現体系の試案

#### ①　図的表現を「イメージ図的表現」言語的表現を「言語・命題的表現」に

図的表現を「イメージ図的表現」に、言語的表現を「言語・命題的表現」にする理由を顕在記憶における心象（イメージ）の表象化から述べる。心象の表象が記憶にどのように表象化されるかは、抽象的な言葉に近い命題表象であるとか、実物や写真などに近い心象の形で表象化される心象表象であるとかの考えがある。この命題とは、概念的記憶に表象される最小の表象形態で、２つ以上の概念間の関係を表し、正誤の真偽について判断し断定できる言語の最小単位である。心象表象は類比表象の考えに代表され、心象に表象化される内容は、視覚に映る映像に類似した視覚的情報である。Paivio は二重表象モデルを提唱し、連続的に入力してくる情報を知覚し、表象化するとき、言語記号による表象様式と非言語的な心象記号による表象様式が２つあるとした。入力情報の種類で言語記号か心象記号のどちらか一方か、両方の形で表象化されるという。

この説から中原氏の表現体系を考察すると、具体的な操作を図的に表現するために、いったん心象として記憶に表象化する必要がある。すなわち、そこに具体的な操作が、非言語的な心象記号による表象様式と言語記号による表象様式の両方、もしくはどちらか一方の心象となる。そこで試案では、「図的表現」を心象記号的な意味も込め「イメージ図的表現」とした。

さらに、「言語的表現」もこの段階では、心象記号による表象様式と重なる場合もあり相補的と言える。そこで、命題的な言語による把握が重要であることを含め、言語的表現を「言語・命題的表現」とし、「イメージ図的表現」と同列に位置づけた。児童が問題解決に当たり、図的表現を使おうとする児童もいれば、公式的な言葉の式を使おうとする児童もいることから、この位置づけは頷ける。

言語・命題的表現を記号的表現の下に位置づけたのは、Nesselmann による代数学の記号の生成過程を考慮に入れた。言語と数学的な概念とが結び付いて初めて理解される算数・数学的記号と言語は同等な記号的表現でなく、「現実的表現」と比べると、例のように、表現が捨象・抽象化され、一つまたは数個の命題で構成されるスリムな表現となる。

| |
|---|
| 現実的表現…みさこさんがりんごを２個、としくんがりんごを３個持っています。二人のりんごを合わせるといくつでしょう。<br>（下線部分が捨象される。）<br>言語・命題的表現…２個と３個で５個 |

また、Paivio の二重表象モデルを表現するために、「イメージ図的表現」と「言語・命題的表現」の重なる部分、すなわち心象と命題どちらでも捉えている部分を設定した。図的表現も公式的な言葉の式も両方使おうとする児童のことだ。「イメージ図的表現」と「言語・命題的

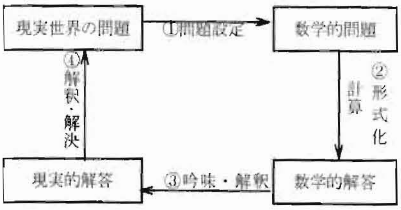
表現」は、どちらも算数・数学の記号的としても表現されるので、「記号的表現」の中に重なる部分を包含した。

② 表現相互の関係はより具体をベースに抽象的表現を積み上げる

潜在記憶の研究、寺澤氏の螺旋形記憶表象理論（Terasawa, 2005; 寺澤 1997）では、想起意識を伴わない膨大な経験や体験（特に具体的操作活動）がかなり長期間、潜在記憶として記憶に残り、類似性の高い学習に重要な影響を与えていることが指摘されている。川又氏は児童が問題解決に至るまでの過程で、問題の構造より自分の理解を優先させ図表現をいったんより具体的なものへ変化させ理解する傾向があり、具体的な操作的活動と図的表現との関連の重要性を指摘している。これを考慮すると、中原氏の５つの表現（現実・操作・図・言語・記号）同士の関係を線で表現することが適切であろうか。試案図４－３－２のように、現実をベースにそれぞれの活動が上に乗っかり、必要に応じてより抽象の高いものや、必要に応じてより具体的なものに戻ると考える方が、適切であると判断した。

また、佐伯胖氏は「イメージは単なる視覚的「映像」でなく、外界のリアリティーを自分の中に取り込み、全身で感じ取っているものだ。」また「 図を描くことは、図を見るためだけでなく、背後にある多様なこと（事態）を見直し、新しいこと（事態）を経験することだ。その無数の経験を通して「真実」を知る。したがって図は「分かったことのまとめ」や「問題解決の手順メモ」でなく、真実性の吟味・総点検の対象となる事柄の凝集である。」と述べ、外界のリアリティーすなわち現実と経験を重視する。

そこで、試案には現実と経験を位置づけた。




さらに、数学化サイクルで考えてみると、現実世界の問題を数学的問題にして解決する場合、現世界の問題をまるごと取り上げるのではない。一部分の数学的に解決しようとする場面を取り出し数学的問題にする①の活動を行うが、それが「現実的表現」だ。したがって、課題解決に向かうためのその他の表現は「現実的表現」の枠の中に包含されるもので、試案では「操作的表現」などを「現実的表現」の中に位置づけた。しかし、問題解決のどれか一つの表現過程で混乱が生じるとそれぞれの表現が相互に関連し合うだけでなく、「現実的表現」の枠までも破り、佐伯胖氏が指摘するように現実や経験にもどり、全身でとらえ直すこともあると考え矢印でそれを表現した。また、中原氏の表現体系が上に行くに従い「Ｅ→Ｉ→Ｓ」となるのに対し、この試案では、中心に向かうにしたがって「Ｅ→Ｉ→Ｓ」となるようにしている。

（３） イメージ・図的表現におけるメタ的表現の体系の試案

① 中核的図的表現の法則図と関係図の分離についての試案

中原氏の図的表現の分類では、学習指導の方法において用いられる表記としてメタ的表現がある。基礎操作は主体と客体を結びつけ思考を助ける方法であるから、図的表現においてはこのメタ的表現が中心と考える。

ところが、そのメタ的表現の内容図について疑問が残る。それは法則・関係図についてである。法則図は算数・数学の法則を表す図であることはよい。

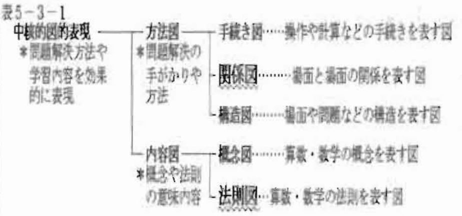
しかし、関係図は２つ以上の場面とその間の操作であるオペレーター(operator)を表す図であり、場面図とその間の手続き的な関係を表現した図であると考える。その点で関係図は操作や計算の手続きだけを表現する手続き図と区別することができ、関係図は場面図と手続き図を反省的に思考することで表される点で場面図や手続き図よりもやや抽象的であると言える。

また、実践的に考えても、例えば操作の倍では、変化する前と後の様子とどのように変化させたか、３点を見つける手がかりを図そのもの

が与えてくれる。関係図は児童に問題解決の手がかりや方法を明らかに与える図であり、内容図ではなく方法図に位置づけたい。

これらの理由から、法則図と関係図を切り離して考えることを提案する。この考え方をもとに、表５－３－１に示す試案が、中原氏の分類をもとにした、法則図と関係図を分けた分類である。

表5−3−1



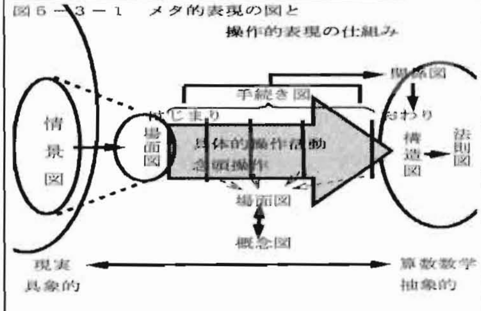

以下この分類にしたがって論を進めるものとする。

② メタ的表現の表現体系の試案について

メタ的表現と操作的表現の関わりについて、概念づくりや問題解決の手がかりや方法を示すのは、操作的表現であり具体的な操作活動やそれを頭の中で行う念頭操作である。

メタ的表現の図と操作的表現の関わりを明確にする。メタ的表現の図と操作的表現の関わりを「メタ的表現の図と操作的表現の仕組み」として図５－３－１に示す。

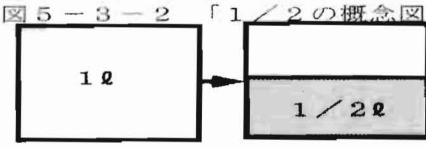
図５－３－１　メタ的表現の図と操作的表現の仕組み




現実の中から問題となる情景を捉えたのが情景図である。その情景から問題を焦点化したのが場面図だ。したがって、２つの図は現実の代理として、授業の導入で現実的状況と学習内容を結びつける役割を果たす、具象的レベルの図である。

次に抜き出した問題場面に応じた具体的な操作活動から概念形成や問題解決をおこなう。その活動の一場面一場面も一つだけ取り出せば場面図だ。この具体的な操作活動の途中の一場面で算数的概念に関わる図が概念図だ。例えば分数の概念は１ℓの容器に半分まで水を入れた結果として図５－３－２のような　１／２の概念図ができる。

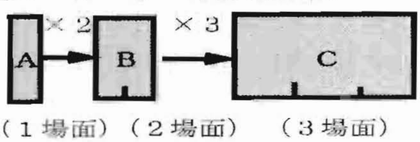
図５－３－２　「１／２の概念図」




場面図と違うのは、概念図で表現したいのは１／２ｍのような概念であり、必要のない例えば色や形など、さらには普遍単位までも捨象され、図の抽象化が進む点だ。また、場面と場面の間の手続き・具体的操作だけを表現すれば手続き図だ。手続きや操作を反省的に思考し、場面と場面に示される関係を表現すれば、関係図。概念図同様目的から、図は抽象化される場合が多い。手続き図や関係図のはじまりや終わりとなる場面は、具体的な活動のはじまりと終わりの場面に限らない。２つの場面だけとも限らない。またその一つ一つの場面が場面図であったり概念図であったりもする。

例えば、３種２段階の問題の関係図は図５－３－３に示すとおり３場面であり、ＡＢＣの図が概念図、さらには図的な表現に限らず記号的な表現を用いる場合もある。

図５－３－３　「３種２段階」




このように関係図は手続きを反省的に思考し関係を捉えるので、手続き図と比べると抽象度も高いが、具体的操作を表現し関係を表すのだから、具体的操作との類似度が高く構造図と比べると、抽象度は低く児童に分かりやすいと考える。具体的な操作活動を終え、一連の場面や概念、手続き・操作活動、場面と場面の関係を

振り返りひとつの図に整理しまとめたものが構造図で、その構成は、かなり高度な反省的思考を必要とする。しかし、いったん構成すると思考を助ける有効な基礎操作の図として、効果が期待できる。

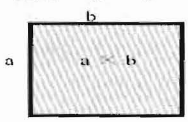
さらに図を構成する立場に立って考えると、これまでの図を見つめ、算数的な法則を見出す場合が法則図だ。例えば、交換法則で説明すると表５－３－１のようになる。

表５－３－１

| | | |
|---|---|---|
| | (能記) | (所記) |
| (本義) | a × b ＝ b × a | 交換法則 |
| (転義) | 面積図 | 面積の回転 |

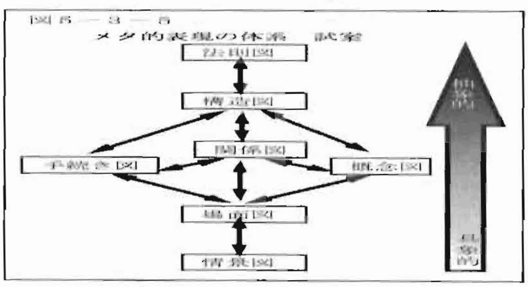
図５－３－４の長方形の広さはａ×ｂで表現できるが、９０度回転し、たてとよこを変えるとｂ×ａとなる。

図５－３－４




どちらも同じ広さを表すのだから交換法則を説明することができる。式のａ×ｂ＝ｂ×ａと面積図に関係はないが、交換法則と面積の回転に類似性を見つけ、説明を行ったのである。

このように操作的表現を中心として、筆者の分類する情景図、場面図、手続き図、関係図、概念図、構造図、法則図には、図を構成する構成主義の立場から考えると、一つの体系を与えることができる。その試案が図５－３－５に示す「メタ的表現の体系　試案」である。上に行くほど、抽象レベルが高くなる。




先に分析した教科書の図を具体的に当てはめると、手続き図…「手続き図」　関係図……「関係図」　概念図……「面積図」　構造図……「線分図」「対応数直線」「テープ線分図」と言う具合になり、「線分図」や「対応数直線」「テープ線分図」の操作との類似性の低さ、反省的思考による図の構成の困難さが予想できる。中原氏も「準備性の原理」として「線分図などの活用には準備的な指導が必要である。」と述べているところである。

### （４）　系統的な乗法・除法の基礎操作のカリキュラムづくりの視点

Ｇ社（対応数直線）、Ｋ社（線分図）の教科書を使う児童約１０００人を対象にした調査から次のような視点を得た。

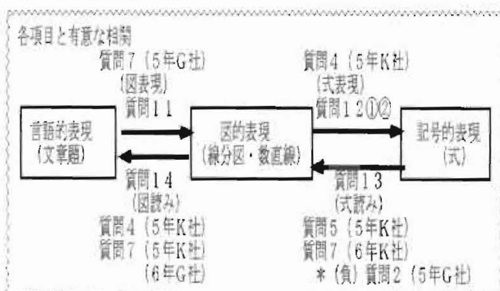
① 児童の図の効果に対する意識調査結果から

ア 児童の意識の平均得点を授業改善に生かす視点（省略）

イ 特に社会的相互作用を重視する視点…各意識と総合計点との相関を調べた結果、次に示す図の結果を捉えることができた。特に質問７「友達に解き方を説明するのに図が役立つ」という社会的相互作用に関わる意識と問題解決の総得点は有意な相関が多く見られる。

相互作用的構成主義では、社会的相互作用は知識構成過程の機能の面からも、授業のすべての局面において重要であることから、先に述べたとおり、極めて重視されてきた。

総合計点と有意な相関
質問４　数と数の関係をつかむのに図が役立つ（５年Ｋ社）
質問７　友達に解き方を説明するのに図が役立つ（５年Ｋ社）（６年Ｋ社）
質問９　友達の考えとの違いをつかむのに図が役立つ（６年Ｋ社）



このように、子ども同士で説明し合う算数的活動は特に重視されなければならない。そのためには説明の基となる基礎操作の重要さも強調したい。

**② 問題解決の方略(strategy)の調査結果から**

**ウ 文章を読んだらすぐに図をかく方略(strategy)を身に付けさせる視点**

図をかくタイミングの５年生６年生それぞれの累積比率を求めた表が表７－３－１である。

５年生と６年生の比較をすると読んだ後にすぐに図をかく児童の割合と図をかかない児童の割合が高い。特に６年生は５年生と比べると、読んだ後にすぐに図をかく児童の割合が約３％高く、図をかかない児童の割合が約９％高い。

表7－3－1　　図をかくタイミング

| 5年生 方略 | 頻度 | 累積 % | 6年生 方略 | 頻度 | 累積 % |
|---|---|---|---|---|---|
| 読んだ後 | 217 | 41.41% | 読んだ後 | 221 | 44.29% |
| 式の後 | 104 | 61.26% | 式の後 | 37 | 51.70% |
| 計算の後 | 31 | 67.18% | 計算の後 | 24 | 56.51% |
| 答えの後 | 10 | 69.08% | 答えの後 | 13 | 59.12% |
| 確かめの後 | 8 | 70.61% | 確かめの後 | 13 | 61.72% |
| 図はなし | 154 | 100.00% | 図なし | 191 | 100.00% |

しかし、設問の正答率・完答率はＫ社Ｇ社ともに６年生が高く、図は問題解決にさほど有効な手段ではないと思われた。そこで、図をすぐかく児童の平均点、図はかくがすぐにかかない児童の平均点、図をかかない児童の平均点を求め検定を行った。その結果、確率統計上有意な差が出たのは２つであった。一つは５年生Ｋ社で、「図をすぐかく児童の平均点は図をかかない児童の平均点より有意（P(T<=t) 片側　0.004563）に高い」こと、一つは６年生Ｇ社で、「図をすぐかく児童の平均点は図はかくがすぐにかかない児童の平均点より有意（P(T<=t) 片側　0.025977）に高い」ことであった。その他の比較では有意な差はなかった。 図をすぐにかくことは、一つの方略としてある程度有効であることが分かった。

**エ 図的表現だけで理解させようとしないという視点**

児童にはそれぞれ学習スタイルがある。図７－１－４はその一例で、記号的表現と操作的表現のＡＴＩである。

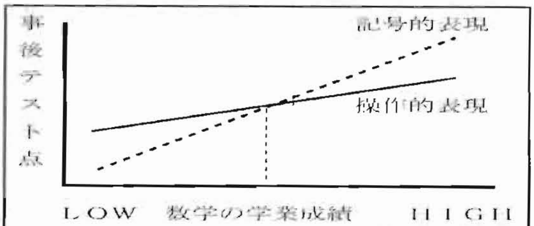



図７－１－４　学習スタイル(操作的表現と記号的表現)と学業成績のＡＴＩ
(参考) Journal for Research in Mathematics Education, v11 n5 p367-74 Nov 1980

数学の学業成績の低い児童ほど図的表現を含めた操作的表現が効果的であることを示す。逆に、数学の学業成績の高い児童ほど言語や記号などの表現を用いた方が効果的であることを示す。５年生より６年生の方が正答率や完答率が高いのに図をかかない割合が高いのは、このＡＴＩに当てはめると、発達が進み学業的に高くなった６年生が記号的な表現を用い問題解決をする割合が増えるということである。６年生で実に約 40 ％の児童が図を使わないと答える背景には、念頭操作などイメージによる思考もあると考えられるが、「キーワードをもとにする」「ことばの式や公式を使う」「簡単な整数に置き換える」などの様々な方略を使って問題解決しているとも考えられる。また、式から図にする課題と「何算で解くか決めるのに図が役立つ」という演算決定についての意識の相関は有意な負の相関（係数-0.17505　P-値 0.030978）が見られた。これはテープ数直線で演算決定をしようとする児童ほど、乗法・除法の演算決定を失敗する傾向が強いことをしめしている。

この結果からも、図の重要性は認識するが、図だけで児童に理解や概念形成、問題解決をせまるのは無理であることが分かる。例えば「ことばの式や公式を使う」方略しか持たない児童に対して「図で考える」という重要な方略を、まずは与える程度の意識で児童に徐々に図の構成化を図るのがよいと考える。

操作的表現、イメージ図的表現、言語命題的

表現、記号的表現これらの表現を効果的に使える力、すなわち基礎操作の力を養うことこそ多様な問題解決方法を備えた思考力・判断力・表現力の高い児童を育てるために大切であると考える。

図だけ記号だけといった一つの表現で理解させることは、実感を伴わない道具的理解（Skemp.R.R）に終わる可能性が高いことを指摘しておきたい。

③　図的表現を中心とした活用調査結果から

オ　問題を座標形の図に表現し演算決定する困難さを克服する視点

５・６年生の乗法除法に関わる単元で、G社では対応数直線やテープ線分図が多く使われ、K社では数直線や関係図が多く使われる。

そこでアンケート調査の設問はG社５年でテープ線分図、６年で対応数直線、K社５・６年数直線という座標形の図を用いて調査を行うことにした。

調査の結果は、文章に書かれてある数を座標形の図に書き入れるだけの問題であるのにかかわらず、完答率は表７－３－２に示すとおりであった。

表７－３－２

| 学年 | 教科書 | 完答率 |
|---|---|---|
| 5年生 | G社 | 48.63% |
| 6年生 | G社 | 57.14% |
| 5年生 | K社 | 40.95% |
| 6年生 | K社 | 44.39% |

K社の場合、連結形の関係図も用いられているので単純に２社の比較はできない。しかし、明らかにどちらも低い水準である。この実態で図をかくよう働きかけても、約６０％の児童が間違い、むしろ図をかかない方が問題を解くことができるという現象が起こるかもしれない。さらに、上手く図がかけたとしても、その図をもとに演算を決定する課題の正答率は、表７－３－３に示すとおり、５年生で約 80 ％である。最高で 50.24%の正答率は明らかに低い。

座標系の図は演算決定においても児童に分かりにくいものとなっている。

特に図が１の内側で収まる内包の図から正解の式を選ぶ問題は５年生には困難を要する。

表７－３－３

| 学年 | 教科書 | 正答率 |
|---|---|---|
| 5年生 | K社 | ①18.53% |
| | | ②38.36% |
| 5年生 | G社 | ①12.67% |
| | | ②36.99% |
| 6年生 | K社 | ①50.24% |
| | | ②49.76% |
| 6年生 | G社 | ①37.07% |
| | | ②44.22% |

①は内包の図　②は外延の図

ここで乗法除法のカリキュラム開発をするにあたり、３択に迫られる。一つは、このまま座標系の図にこだわり指導法を工夫し徹底的に指導する。

一つは､座標系など図はほどほどに指導して、「キーワードをもとにする」「ことばの式や公式を使う」「簡単な整数に置き換える」などの図以外の方略を徹底的に指導する。

最後の一つは、対応数直線やテープ線分図、数直線という座標系の構造図は「図の体系試案」で述べたとおり、抽象度が高いため、理解力の高い児童には効果も見られるが、特に抽象の難しい児童には非常に困難である。

先のデーターでは図をかくので約 40 ％～ 60 ％、図をもとに演算決定するのに約 50 ％～ 80 ％の児童が困る。

そこで、もっと児童が類似性を感じやすい具象的な図、例えば手続き図や面積図のような図を用い指導を行うという選択肢である。もちろんこの場合、新たな乗除法の図に関する系統表が作成され、その系統表に応じたカリキュラム開発がなされなければならない。

そこで、新たな乗除法の図に関する系統表の作成に取り組んだ。

カ　図は外延の図から内包の図へという視点

図7－3－1　外延の図と内包の図

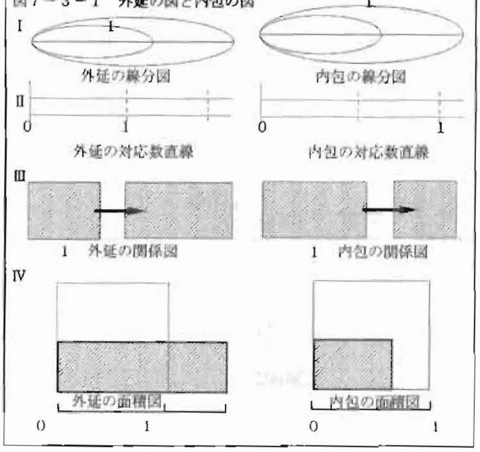



図7－3－1のとおり、同じ図でも内包の図と外延の図では、有意に外延の図の方が簡単である。図のカリキュラムづくりの基本は外延の図から、内包の図と考える。

**キ　式を図に表現する活用を大切にする視点**

Piaget による発達段階の特質では、４・５年生の発達は具体的操作期の第２段階にあたり、操作構造は具体的操作が全般的均衡に到達する時期であり、類や系列でも逆換性による可逆性の成立や関係性の相補性による可逆性の成立が見られる時期であると言われている。ところが、本調査の可逆思考を調査する式表現と式読みの課題達成状況を見ると、式読みの課題（式に当てはまる図を選ぶ）の方が式表現の課題（図に合う式を選ぶ）と比べると、有意に低い結果が出た。これは座標系の図をもとにした課題では、まだ Piaget の指摘する可逆性が不十分で、操作が全般的均衡に到達していない児童がかなり多いことを示す。また、経済協力開発機構（OECD）による学習到達度調査（PISA）では数学的リテラシー、すなわち「数学を活用し課題に対応できる力」を主要能力（キーコンピテンシー）として位置づけ、これからの時代を生き抜く上で重要と考えているが、このような社会状況の中では、順思考的な課題の遂行ばかりでなく、式を活用する逆思考的な課題にも対応できる活用力が重要となる。

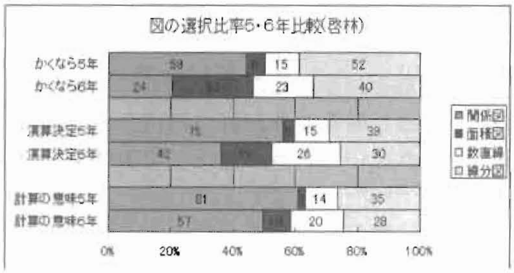
これを達成するためには、この調査の内容で言えば、まず図の深い理解が前提となり、次に図から演算を決定する順思考の力を高める必要がある。その後、逆思考的課題に迫るようなカリキュラムの構成が望まれる。

実践上、式を読むというと、式から具体的な問題づくりをさせることが多いが、この点はこの調査では、比較的よい。しかし、式を図にすることは非常に困難であることが分かった。式を具体的な図、対応数直線、関係図に表すことができるようになる可逆的なカリキュラムの構築が必要なのである。ここでは式活用の内容に課題があることを指摘する。

**④　教科書の図に対する意識調査結果から**

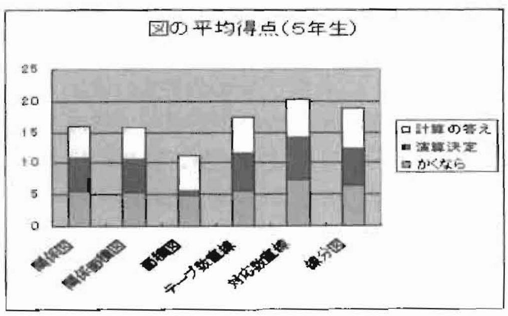
**ク　連結・領域系の図の可能性の視点**

児童の図の選択に教科書の影響は大きい。




関係図、関係面積図、面積図、を使うＫ社の児童は約８０％～９０％の確率でこれらの図を選んでいる。また対応数直線、テープ数直線、面積図を使うＧ社の児童は約５０％～７０％の確率でこれらの図を使う。

座標系の図による正答率や完答率は先に示したとおりかなり低い。また座標系を選ぶ児童は比較的理解力のある児童で、領域系や連結系の図を選ぶ児童は座標系の理解に困る児童で、その割合の高さは無視できない。



座標系と連結・領域系の両方を採用しているK社を見ると、約５０～６０％児童が連結・領域系の図を支持している。このことを考慮すると、連結・領域系の図の可能性は座標系よりも高いと予想できる。

したがって、操作的表現、図的表現、言語命題的表現、記号的表現という基礎操作の中の図的表現に連結・領域系の図の位置づけることをこれまで以上に重視したい。

### （５）乗法・除法の意味づけにおける基礎操作のカリキュラムの試案

#### ①　面積図・関係図から見た乗法・除法の構造

多鹿秀継氏の線分図と関係図の比較研究の成果から関係図の効果の高さは実験的に実証され、児童を対象にした調査結果はそれを追認する結果であった。

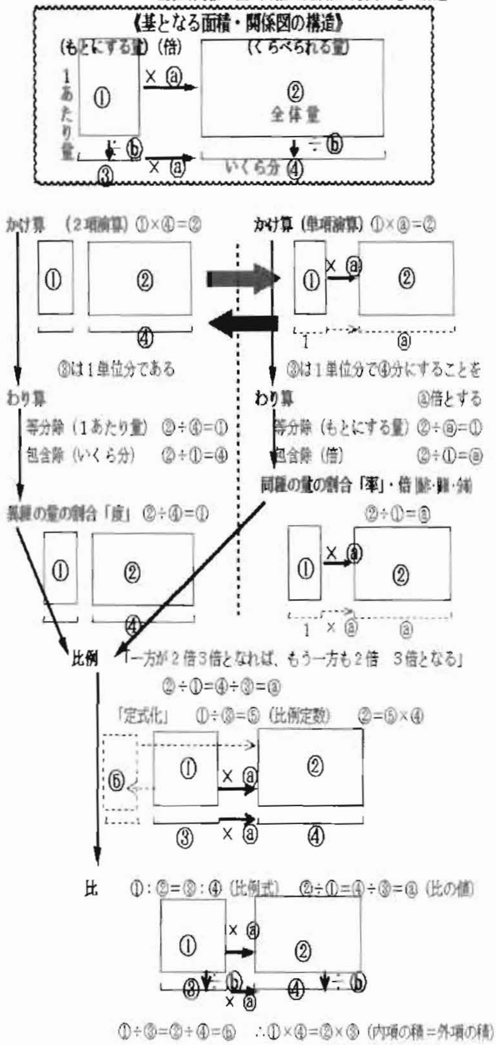
また、児童を対象にした調査結果は、線分図や対応数直線が研究者や教師が期待するほどの効果が見られないことも多鹿氏の実験結果を追認した。

ところが、現行の教科書を見ると、K社以外の教科書ではこの関係図はほとんど用いられていない。K社の教科書においても関係図が登場するのは３年生の３要素２段階の指導からである。線分図や対応数直線で表しにくいオペレーター(operator)を効果的に表現できる関係図の導入が、倍のスタートである整数倍の指導でも必要であると考える。

児童にとって唐突な関係図の導入は混乱を招く。そこで、乗法の導入である２年生から、Piagetの示した２分法の積を完全な乗法構造として把握する具体操作期の児童にあった２項演算モデルである面積図をもとに、単項演算モデルである関係図を導入することを考えた。

図８－１－１に示すとおり小学校の乗法・除法に関わる内容は先の２つのモデルで整理することができる。そこで２項演算と単項演算両方の考え方が児童にできるような基礎操作のカリキュラムに取り組むものとした。

図８－１－１　面積・関係図で表すかけ算（２項演算・単項演算）
割合（同種の量・異種の量）倍、比例、比の構造




#### ②　面積図から関係図によるかけ算の意味づけにおける２項演算から単項演算への基礎操作のカリキュラム

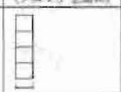
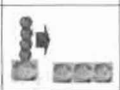
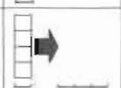
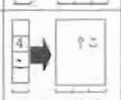
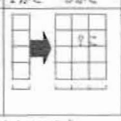
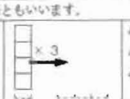
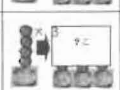
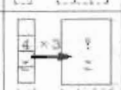
かけ算のカリキュラムづくりのポイントは以下の３点である。

ア　結果表現の現実的表現課題から進行表現の現実的表現課題に
イ　具体物と半具体物などの効果的な表現から記号化へ
ゥ　式を意味づける言語・命題的表現とイメージ図的表現

ア　結果表現の現実的表現課題から進行表現の現実的表現課題に

導入時の現実的表現を変えることを試みる。「1かごにりんごを4個ずつ、3かごに入れました。りんごは全部で何個でしょう。」という具合にりんご4個ずつを3かごに入れ終わった状態を問題する現実的表現をここでは「結果表現」と呼ぶことにする。この結果表現を問題にすると、外延的内包量（1あたり量）を外延量（全体量）から抜き出す作業が必要になる。その作業はわり算的である。

表8－1－3　面積図・関係図によるかけ算の意味づけにおける2項演算から単項演算の基礎操作の構成過程

| ⓐ現実的表現 | ⓑ 操作的表現（具体物や半具体物） | ⓒイメージ図的表現（ブロックを基に） | ⓓ言語・命題的表現 | ⓔ記号的表現 |
|---|---|---|---|---|
| ㋐1つのかごにりんごを4個ずつ入れます。 |  |  | 1かごあたり4個<br>1かご4個<br>4個ずつ | 4個<br>4個/かご<br>4個<br>4 |
| ㋑3かご分りんご入れようと思います。 |  |  | 3かご分<br>3かご | 3かご<br>3 |
| ㋒りんごは全部で何個用意すればいいでしょう。 | <br>ブロック等での操作 | <br>1かご　3かご | 1かごあたり4個が3かご分で何個<br>1かご4個が3かごで何個 | 4個/K×3かご<br>4個×3<br>4×3 |
| ㋓ |  |  | 4個/K×3K=12個<br>4個×3=12<br>4×5=12<br>1つ分の数×いくつ分=全部の数 | |
| ○の△分のことを○の△倍ともいいます。 | | | | |
| ㋔りんご4個を3倍します。（4個ずつ3かご分） |  |  | 4個の3つ分<br>4個の3倍<br>4の3倍 | 4個×3<br>4×3 |
| ㋕りんごは何個になるでしょう。 |  |  | 4個の3倍は何個<br>4の3倍で何個<br>もとの数×倍=比べる数 | 4個×3=12個<br>4×3=12 |

そこで、児童が具体的な操作をしながら、図などを構成できるよう現実的な表現を前ページの表8－1－3のように「㋐1つのかごにりんごを4個ずつ入れます。」にかえる。このように操作が進行している表現を「進行表現」と呼ぶことにする。進行表現にすることにより、児童は素直にりんご4個をかごに入れ、図的表現に示すとおり、かけ算を構成する1つの項である外延的内包量（1あたり量）を一番に表現することができる。そして、もう一つの項である外延量（いくつ分）を「㋑3かご分りんごを入れようと思います。」の現実的表現にしたがってかく。それは「内包量×外延量＝外延量」という式の順番に当てはまり、操作と図と記号の基礎操作が一致する。

イ　具体物と半具体物などの効果的な表現から記号化へ

取り出した内包量（一あたり量）分を外延量（いくら分や全部の量）にくわえる児童が数名出てくる。

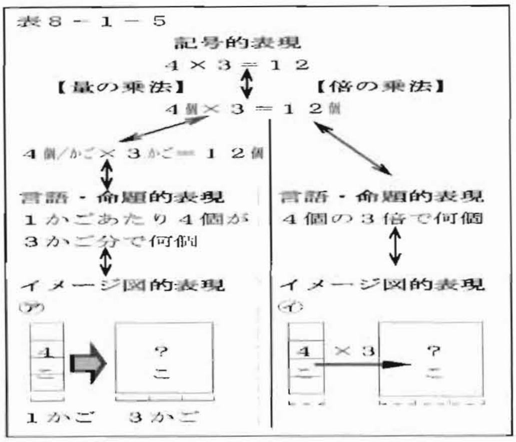
外延的内包量（1あたり量）の実物のりんご4個をかごに入れ、問題となる3かご分の全部の数を求める「㋒りんごは全部で何個用意すればいいでしょう。」では、実物のりんご使用は避けたい。より抽象化を図り、取り出した内包量（一あたり量）を外延量（いくら分や全部の量）にくわえる問題を解決するためにも、りんごを数図ブロックやブロック等の半具体物に置き換えさせ、半具体物を使った具体的な操作を行わせたい。（具体物は㋓の段階で確認程度ですませたい。）イメージ図的表現でも、1あたり量といくつ分とを離して書き、間に関係図への発展を考え矢印を入れたり、求める個数を明確に示すように？等を書かせたりするような工夫をし、細心の注意を払いたい。

以上の配慮は関係図における「㋕りんごは何個になるでしょう。」の段階でも同様で、具体物と半具体物との効果的な使い分けが重要であると考える。もとになるりんご4個を具体物で表現した後、「りんごが何個あるか」はブロックなど半具体物を操作させ求めさせたい。

ウ　式を意味づける言語・命題的表現とイメージ図的表現

かけ算の式の意味に「量」と「倍」の意味を持たせ指導することは、2年の「かけ算」の単元である。「量」と「倍」の意味はもちろん、式による表現の区別もできることに越したことはない。

しかし、式表現の違いによる「量」と「倍」の意味づけの区別ができにくい場合、表8－1－5に示す通り、より現実に戻って式を意味づける言語・命題的表現とイメージ図的表現等との関わりの指導を重視したい。




式４個×３＝１２個 あるいは ４×３＝１２は、言語・命題的表現で表せば、量の乗法では「１かごあたり４個が３かご分で何個」、倍の乗法では「４個の３倍で何個」と表されること、イメージ図的表現で表せば、量の乗法は２項が、倍の乗法は１項とオペレーター（operator）が表現された図になることが分かるようにしたい。それらは式を読みとる活用力のもとであり、式や言語や図や操作や現実をより強く結びつけ、思考力・判断力・表現力を養うために大切な基礎操作と考える。

**③　２項演算から単項演算への基礎操作を具現化する教具の実際**

**A 操作的表現…「同じ数ずつ入れよう。」**

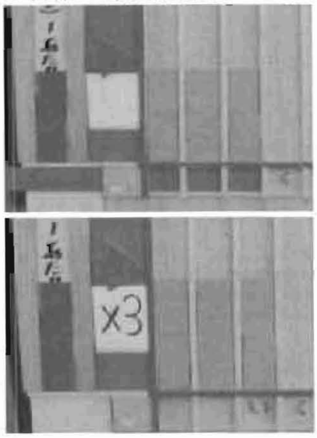
タイルを４個ずつ、３つ分
入れていきます。

★石原清貴氏の教具を参考に、山野が改良を加えたものである。

**B イメージ図的表現…「全部を絵で表そう。」**

全部の下に隠れているタイルを、ノート等に書いて全部の数を求めます。

**C 言語・命題的表現…「ことばで言おう。」**




**（２項演算）**

「１さら４個が３さら分で、全部は１２個」

**（単項演算）**

「４個の３倍で１２個」

★いくつ分をとり、×３のオペレーターを書く。

**D 記号的表現…「式にしよう」（名数式の場合）**

**（２項演算）** Ｃの上の写真を見て

４個／さら×３さら＝１２個→４×３＝１２

**（単項演算）** Ｃの下の写真を見て

４個×３＝１２個　→　４×３＝１２

（３倍）

＜ 引用・参考文献 ＞


１）二谷廣二著「教え方が「かわる・わかる」」学芸図書

２）中原忠男編著「構成的アプローチによる算数の新しい学習づくり」　東洋館出版社

小高俊夫著「算数・数学に認知科学は役立つか」　東洋館出版社

３）片桐重男著「数学的考え方の具体化」明治図書

４）多鹿秀継著「算数問題解決過程の認知心理学的研究」風間書房